



Instituto Principia
Academia da Escola de Talentos

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Violações de desigualdades de Bell e de não-contextualidade em computadores quânticos

Turma 2021 Hiperposição dos Charms

Autores

Alexys Vives Bernardino Alves
Ricardo Amorim Casado

Orientador

Marcelo Terra Cunha

São Paulo, SP
2023

Resumo

O presente trabalho propõe uma abordagem baseada em circuitos quânticos a fim de refutar o realismo local e a não-contextualidade simultaneamente, reforçando a interpretação quântica da realidade. Inicialmente, detalhamos o contexto histórico em que houve a proposição desses conceitos por meio do paradoxo EPR e sua seguinte refutação por meio dos teoremas de Bell e Kochen-Specker. Em seguida, são explicados os fundamentos da computação quântica necessários para o entendimento dos circuitos desenvolvidos. Por fim, a prova em que nos baseamos é apresentada junto ao conjunto de circuitos criados pra demonstrá-la em um computador quântico real.

Abstract

The present work proposes an approach based on quantum circuits in order to simultaneously refute local realism and noncontextuality, reinforcing the quantum interpretation of reality. Initially, we detail the historical context in which these concepts were proposed through the EPR paradox and their subsequent refutation through the Bell and Kochen-Specker theorems. Next, the fundamentals of quantum computing necessary for understanding the developed circuits are explained. Finally, the proof on which we rely is presented along with the set of circuits created to demonstrate it in a real quantum computer.

Agradecimentos

Ao nosso orientador, Marcelo Terra Cunha, por ter se voluntariado a nos ajudar nessa empreitada, sempre sendo muito atencioso. Não só nos ajudou em nosso trabalho, mas também foi um bom conselheiro e iniciador na vida acadêmica.

Ao professores Ricardo Matheus e Leonardo de Lima, pela condução do nosso 1^o ano de Escola de Talentos, pela introdução a diversos assuntos aleatórios de ciência e pela apresentação do submundo da Academia. Também ao Fabrício, por se disponibilizar semanalmente no plantão de dúvidas

Ao diretor da Escola de Talentos, Marcelo Guzzo, pela sua iniciativa e disposição em fazer tudo isso acontecer e pela sua preocupação com cada participante.

Aos nosso pais, pelo apoio ao longo de todo o processo.

Ao Stark Bank que sempre nos apoiou financiando os encontros e toda a infraestrutura para a ocorrência de todo o projeto da Escola de Talentos.

Sumário

1	Introdução	5
2	Circuitos quânticos	5
2.1	Introdução	5
2.2	Estados quânticos	6
2.3	Transformações de um qubit	9
2.4	Estados de vários qubits	11
3	Conceitos importantes	13
3.1	Paradoxo EPR e não-localidade	14
3.2	Contextualidade	15
4	Desigualdade CHSH	15
5	Negação simultânea de realismo local e não-contextualidade	18
5.1	Análise teórica	18
5.1.1	Equações para a negação da localidade	18
5.1.2	Equações para a negação da não-contextualidade	19
5.2	Apresentação dos experimentos	20
5.2.1	Circuitos para a refutação da localidade	20
5.2.2	Circuitos para a refutação da não-contextualidade	23
5.3	Resultados experimentais	25
5.3.1	Dados para refutar o realismo local	26
5.3.2	Dados para refutar a não-contextualidade	28
6	Conclusão	29
	Referências	29

1 Introdução

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen propuseram um experimento mental para sustentar a ideia de que a mecânica quântica não é uma teoria física completa [1]. Esse experimento, que, em acordo com o conceito de elementos de realidade, deu origem ao paradoxo EPR, concluiu que a função de onda não fornece uma descrição completa da realidade física, deixando em aberto a possibilidade da existência de uma descrição como essa e motivando a criação de teorias alternativas para preencher as lacunas deixadas pela mecânica quântica. Essas teorias normalmente se baseiam nos conceitos de realismo local e não-contextualidade. O realismo local consiste na ideia de que a causa de uma mudança física deve ser local, ou seja, uma coisa só muda se algo perturbá-la localmente, e que as propriedades dos objetos são reais e existem no universo físico independente de nossas mentes. Já a não-contextualidade é a negação da contextualidade, que é uma característica da fenomenologia da mecânica quântica pela qual as medições de observáveis quânticos não podem ser simplesmente pensadas como revelações de valores pré-existentes.

No entanto, algumas décadas depois, dois importantes teoremas foram elaborados com o intuito de refutar tais teorias, sendo eles o Teorema de Bell [2] e o Teorema de Kochen-Specker [3]. Enquanto o primeiro estabeleceu a não-localidade como uma característica de qualquer teoria de variáveis definidas que recupere as previsões da mecânica quântica, o segundo provou que a contextualidade é uma característica inevitável de tais teorias. Tendo isso em vista, o paper “Simultaneous All-versus-Nothing Refutation of Local Realism and Noncontextuality by a Single System” [4] propõe um experimento baseado na óptica quântica para refutar o realismo local e a não-contextualidade ao mesmo tempo. Dessa forma, tomamos como base esse artigo e adaptamos o experimento em questão para um circuito quântico, usando a linguagem Python e a biblioteca Qiskit da IBM[®] [12].

2 Circuitos quânticos

2.1 Introdução

O experimento desenvolvido neste projeto é totalmente baseado em circuitos quânticos, de tal modo que as páginas a seguir serão utilizadas para explicá-los. Um circuito quântico é construído a partir de qubits (análogo quântico de um bit clássico), que, após serem iniciados, passam por alguma forma de computação e retornam um valor quando são medidos ao final do processo. Em geral, se não passarem por nenhum tipo de transformação, os qubits são inicializados para retornar 0 ao sofrer medição. Assim, para obter outros valores, usamos as chamadas portas quânticas para alterar o estado dos qubits em um circuito. A mais simples das portas quânticas é a porta X (equivalente quântico da porta NOT clássica), que transforma o qubit do estado $|0\rangle$ para o estado $|1\rangle$ e vice-versa.

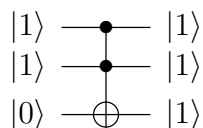
$$|0\rangle \rightarrow \boxed{X} \rightarrow |1\rangle \rightarrow \boxed{X} \rightarrow |0\rangle$$

Existem, no entanto, portas quânticas que agem em mais de um qubit. O exemplo mais comum é a porta NOT Controlada (CNOT), que é aplicada em um par de qubits. A porta CNOT, que guarda grande semelhança com a porta XOR clássica [6], aplica uma porta X no qubit alvo ($q2$) se o qubit controle ($q1$) estiver no estado $|1\rangle$, não fazendo nada se o qubit controle estiver no estado $|0\rangle$. A diferença principal entre a XOR clássica e a CNOT é que a primeira retorna apenas um bit, enquanto que a sua análoga quântica tem dois qubits como saída. A tabela abaixo mostra os valores obtidos pela aplicação da porta CNOT em diferentes pares de qubits:

Entrada (q1, q2)	Saída (q1, q2)
$ 0\rangle, 0\rangle$	$ 0\rangle, 0\rangle$
$ 1\rangle, 0\rangle$	$ 1\rangle, 1\rangle$
$ 0\rangle, 1\rangle$	$ 0\rangle, 1\rangle$
$ 1\rangle, 1\rangle$	$ 1\rangle, 0\rangle$

Tabela 1: Efeito da porta CNOT. Perceba que o efeito da porta XOR se manifesta no q2

Outro exemplo de porta quântica que atua em mais de um qubit é a porta Toffoli, análoga à porta AND clássica, que altera o estado do qubit alvo se ambos os qubits controles valerem $|1\rangle$.



2.2 Estados quânticos

Para descrever o estado do sistema quântico, usamos os chamados vetores de estado. Diferente de um circuito clássico, em que cada bit sempre possui um valor bem definido (0 ou 1), em um circuito quântico, os qubits podem assumir um estado mais complexo antes de serem medidos. Partindo dos casos mais simples, definimos como $|0\rangle$ e $|1\rangle$ os estados em que 100% de chance de medir 0 e 1 respectivamente. Representá-los-emos da seguinte forma:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Esses estados são linearmente independentes, ou seja, não é possível escrever $|0\rangle$ em função de $|1\rangle$ (são mutuamente exclusivos). Além disso, esses estados são ortonormais: são ortogonais, porque $\langle 0|1\rangle = 0$ (são perpendiculares) e são normalizados pois $||0\rangle| = ||1\rangle| = 1$. Essas propriedades nos permitem formar uma base, de modo que qualquer outro estado quântico de um qubit pode ser escrito como uma combinação linear de $|0\rangle$ e $|1\rangle$:

$$|q\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (2)$$

Esse novo vetor é chamado de vetor de estado e resume as informações do qubit que representa.

Agora, precisamos entender como ocorre a medição em um circuito quântico. Toda medição desse tipo se baseia na seguinte regra: a probabilidade de obter algum valor x a partir da medição de um determinado estado $|\psi\rangle$ é dada por

$$p(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2. \quad (3)$$

Para achar a probabilidade de obter x , que pode ser qualquer estado, calculamos o produto interno de $|x\rangle$ com o estado que estamos medindo ($|\psi\rangle$) e elevamos o módulo do resultado ao quadrado. A título de exemplo, tomemos o estado

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle,$$

que está em uma superposição de $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Partindo da equação (3), descobrimos que a probabilidade de medir $|0\rangle$ é

$$\begin{aligned} \langle 0|q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore |\langle 0|q\rangle|^2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Essa regra mostra que as amplitudes estão relacionadas às probabilidades, de modo que o vetor de estado deve estar normalizado (afinal, a soma de todas as probabilidades de qualquer situação deve somar), ou seja, sua magnitude deve ser 1:

$$\langle \psi|\psi\rangle = 1. \quad (4)$$

Logo, para a equação (2), tem-se:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (5)$$

É importante ressaltar que as regras de medição e de normalização também se aplicam a estados de mais de um qubit, os quais serão detalhados mais adiante.

Vale, ainda, lembrar o conceito de fase global. Tomemos o seguinte vetor de estado como exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i|1\rangle. \quad (6)$$

Usando o método de medição, obtemos

$$|\langle x|(i|1\rangle)|^2 = |i\langle x|1\rangle|^2 = |\langle x|1\rangle|^2. \quad (7)$$

Note que os vetores de estado $|1\rangle$ e $i|1\rangle$ geram os mesmos resultados ao serem medidos. Isso significa que esses vetores descrevem estados fisicamente equivalentes e, portanto, indistinguíveis.

Outro elemento importante dos circuitos quânticos é que depois de medir um qubit, sabemos seu estado com 100% de certeza, independente das probabilidades que tínhamos antes de medi-lo. Por exemplo, medindo um qubit no estado (2) e obtendo o valor 0, obteremos o valor 0 de novo se medirmos esse qubit outra vez. Em outras palavras, o qubit colapsa em um determinado auto-estado após a medição, de sorte que qualquer outra aferição retorna o mesmo valor. Devido a essa peculiaridade da teoria quântica, as medições dos qubits são realizadas apenas ao final do circuito, a fim de aproveitar as vantagens que os qubits possuem em relação aos bits clássicos.

Além disso, tendo em mente que é impossível medir a fase global de um qubit, apenas diferença de fase entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, é razoável pensar em um qubit como a combinação linear de dois números reais não negativos e uma fase relativa entre eles:

$$|q\rangle = \gamma |0\rangle + e^{i\phi} \delta |1\rangle. \quad (8)$$

Como o qubit deve estar normalizado, podemos usar a identidade trigonométrica

$$\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} = 1, \quad \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1 \quad (9)$$

para escrever γ e δ em função de uma única variável $\theta \in [0, \pi]$:

$$\gamma = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \delta = \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10)$$

Assim, é possível descrever o qubit $|q\rangle$ em função apenas de duas variáveis reais ϕ e θ :

$$|q\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (11)$$

Dessa forma, interpretando ϕ e θ como coordenadas esféricas, podemos representar qualquer estado de um qubit geometricamente em uma esfera de raio 1 (afinal, o estado está normalizado). Essa representação é conhecida como esfera de Bloch e é especialmente útil para visualizar transformações de um qubit.

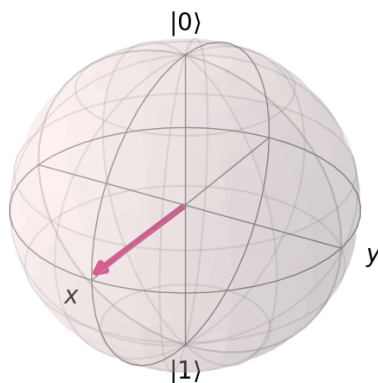


Figura 1: Representação geométrica do estado $|+\rangle$, cujas coordenadas esféricas são $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$.

2.3 Transformações de um qubit

Definidos esses conceitos, podemos começar a pensar em como podemos alterar os estados quânticos. Utilizaremos as matrizes de spin de Pauli. Essas matrizes são especialmente úteis porque podem descrever qualquer transformação quântica em função de σ_x , σ_y , σ_z e δ , sendo δ a identidade. Geometricamente, essas matrizes representam rotações de π em volta de certo eixo da esfera de Bloch, de modo que a matriz σ_z rotaciona em torno do eixo z da esfera, a σ_x em torno de x e assim por diante.

A porta X mencionada anteriormente pode ser representada pela seguinte matriz:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|. \quad (12)$$

Para constatar o efeito exercido sobre o qubit, multiplicamos o estado $|0\rangle$ pela matriz X :

$$X \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$$|0\rangle \xrightarrow{X} |1\rangle$$

Assim como a matriz X , as matrizes Y e Z de Pauli também podem agir como portas quânticas:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Quando aplicamos a porta Z nos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, ela parece não ter nenhum efeito. Isso acontece porque esses estados são os dois autoestados da porta Z . Por essa razão, a base computacional, formada pelos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, é também chamada de base Z . Nós também podemos ter uma base formada pelos autoestados da porta X :

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Já para a base Y , seus autoestados são:

$$\begin{aligned} |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \\ |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Além das portas de Pauli, existem outras portas quânticas usadas para compor circuitos. A mais importante delas é a porta de Hadamard (ou porta H), que permite criar uma superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Essa porta realiza as seguintes operações:

$$H|0\rangle = |+\rangle, \quad H|1\rangle = |-\rangle. \quad (18)$$

O fato de ser uma matriz hermitiana (ou auto-adjunta), isto é, ela é a sua própria conjugada transposta, permite-a fazer a operação inversa:

$$H|+\rangle = |0\rangle, \quad H|-\rangle = |1\rangle. \quad (19)$$

Em outras palavras, a ação da porta H também pode ser pensada como uma transformação entre as bases Z e X e vice-versa.

Outra porta quântica de relevância é porta de fase ou porta P (*phase gate*). Sua característica principal é o fato de ser parametrizada, ou seja, depende do valor ϕ para ser executada. Esse valor indica o ângulo de rotação em torno do eixo Z a ser realizado. A sua forma matricial é:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Vale notar que a porta Z é um caso específico da porta P para $\phi = \pi$.

Outra porta que pode ser interpretada como uma situação específica da P é a S , também chamada de porta \sqrt{Z} . Ela realiza uma volta de $\phi = \pi/2$ em torno do eixo Z . É importante notar que essa porta não é hermitiana, o que significa que ela não é a sua própria inversa: $SS \neq I$, sendo I a identidade. Assim, definimos a sua inversa como S^\dagger (“S adaga”, “Sdg” ou \sqrt{Z}^\dagger), de modo que $SS^\dagger = I$:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}, \quad S^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

A notação \sqrt{Z} advém da propriedade $SS = Z$.

Essa porta tem a capacidade de alternar entre as bases X e Y , assim como a Hadamard alterna entre as bases X e Z . Assim, caso tenhamos um estado $|+\rangle$ podemos aplicar a S e transformá-lo no estado $|R\rangle$. Para fazer o contrário, basta aplicar a S^\dagger . Para se transformar da base Y para a base Z , é necessário combinar as portas S^\dagger e H . Tomemos como exemplo o estado $|L\rangle$:

$$\begin{aligned} HS^\dagger|L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Analogamente, $HS^\dagger|R\rangle = |0\rangle$. É interessante observar que, enquanto a Hadamard faz a tanto a transformação $X \rightarrow Z$ quanto $Z \rightarrow X$, a porta S faz a mudança $X \rightarrow Y$ e uma porta diferente é necessária para realizar $Y \rightarrow X$, no caso a S^\dagger . Caso aplicássemos a S na base Y , ocorreria a mudança para a base X ainda sim, mas a ordem dos vetores ficaria invertida, o que não se releva útil. Essa distinção pode ser interpretada pelo modo de ação das portas: a porta H se revela como uma mudança

de posição dos eixos X e Z da esfera de Bloch, isto é, uma reflexão da esfera pelo eixo que passa entre os eixos X e Z enquanto que a S é uma mera rotação pelo eixo Z , que acaba servindo como $X \rightarrow Y$.

Um ponto chave para o entendimento do experimento é a medição do qubits. Os computadores quânticos são capazes de medir apenas nos estados base $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que são auto-estados da base σ_z , daí o nome base computacional. Portanto, caso queiramos medir um estado a partir do ponto de vista de uma base diferente da Z , devemos realizar uma transformação, de forma que os auto-estados dessa base sejam transformados para $|0\rangle$ e $|1\rangle$. As transformações mais comuns são as supracitadas $X \rightarrow Z$ e $Y \rightarrow Z$.

2.4 Estados de vários qubits

Da mesma forma que um qubit apresenta dois autoestados possíveis, dois qubits formam um sistema com quatro níveis. Assim, para descrever esse estado, serão necessárias quatro amplitudes de probabilidade, que serão armazenadas em um vetor de quatro dimensões:

$$|a\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Assim como no caso com um qubit, o vetor precisa estar normalizado:

$$|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1. \quad (24)$$

Além disso, podemos descrever o estado conjunto de qualquer quantidade de qubits usando o produto de Kronecker:

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, |b\rangle = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

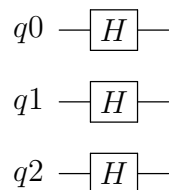
$$|ab\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \\ a_1 \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

De modo que

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = |a\rangle |b\rangle = |ab\rangle$$

Logo, para n qubits, teremos um vetor formado por 2^n amplitudes.

Por exemplo, o circuito



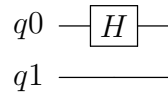
é representado pelo vetor

$$|+++ \rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Agora que sabemos como representar o estado de vários qubits, também podemos representar a porta *CNOT* matricialmente. Como mencionado anteriormente, essa porta realiza a ação da porta *X* no qubit alvo se o qubit controle for $|1\rangle$. Em um vetor de estado de 4 dimensões, a porta *CNOT* pode ter as seguintes matrizes dependendo de qual qubit for o controle e qual qubit for o alvo:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

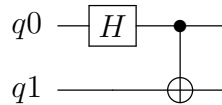
Nós já sabemos como a *CNOT* age em estados clássicos, porém o mais interessante acontece quando ele age em um qubit em superposição. No circuito



$q0$ está no estado $|+\rangle$, produzindo o estado:

$$|0+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle). \quad (28)$$

Ao aplicar a *CNOT*,



obtemos o estado

$$CNOT |0+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (29)$$

que está emaranhado.

O estado que acabamos de obter é conhecido como um Estado de Bell, sendo que ele tem 50% de chance de ser medido no estado $|00\rangle$, e 50% de chance de ser medido no estado $|11\rangle$. O mais interessante é que esse estado não pode ser descrito a partir de dois qubits separados. No entanto, é preciso destacar que mesmo os qubits estando em superposição, medir um deles nos dará também o estado do outro. Ainda que os qubits estivessem muito distantes um do outro, medir o estado de um desses qubits colapsa a superposição e tem um efeito imediato no outro. Esse fenômeno contraintuitivo motivou a elaboração do paradoxo EPR no começo do século XX,

sendo então referido como “ação assustadora à distância” [7]. Os possíveis estados de Bell são:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (30)$$

A tabela a seguir mostra como os qubits devem ser preparados pra se obter um dado estado de Bell usando o circuito acima.

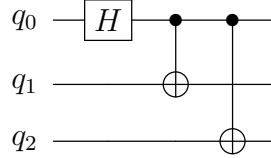
$ \phi^+\rangle$	00	$ \phi^-\rangle$	01
$ \psi^+\rangle$	10	$ \psi^-\rangle$	11

Tabela 2: relação entre os estados de Bell e a entrada q_1q_0 .

Ainda, podemos generalizar esse estado de máximo emaranhamento para três qubits. Uma forma possível é o estado de Greenberger-Horne-Zeilinger ou estado GHZ [9]. Esses estados são:

$$\begin{aligned} |\Phi_0^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle \pm |111\rangle), & |\Phi_1^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle \pm |011\rangle), \\ |\Phi_2^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle \pm |101\rangle), & |\Phi_3^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle \pm |110\rangle). \end{aligned} \quad (31)$$

A preparação do estado GHZ é feita por



Analogamente, esta é a tabela de preparação dos estados GHZ.

$ \Phi_0^+\rangle$	000	$ \Phi_0^-\rangle$	001
$ \Phi_1^+\rangle$	100	$ \Phi_1^-\rangle$	101
$ \Phi_2^+\rangle$	010	$ \Phi_2^-\rangle$	011
$ \Phi_3^+\rangle$	110	$ \Phi_3^-\rangle$	111

Tabela 3: relação entre os estados GHZ e a entrada $q_2q_1q_0$.

Como as portas H e $CNOT$ são auto-adjuntas, para se medir um estado GHZ, basta aplicar o circuito apresentado na ordem e inversa e utilizar a tabela 3.

Vale ressaltar que essa não é a única generalização existente e que, ao contrário dos estados de Bell, não é possível obter todos os estados de três qubits que existem a partir dos oito estados GHZ [13].

3 Conceitos importantes

Esta seção dedica-se à melhor compreensão de três conceitos fundamentais para o entendimento da prova proposta neste trabalho. Esses conceitos são o paradoxo EPR, a não-localidade e a contextualidade.

3.1 Paradoxo EPR e não-localidade

O paradoxo EPR consiste em um experimento mental proposto pelos físicos Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen, elaborado com o intuito de provar que a descrição da realidade proporcionada pela mecânica quântica está incompleta. Na proposição original, existem duas partículas, A e B, que interagem brevemente e passam a se mover em direções opostas. De acordo com o princípio da incerteza, é impossível medir tanto o momento quanto a posição da partícula B com exatidão. No entanto, seria possível medir a posição da partícula A, e com isso se poderia inferir a posição da partícula B. Analogamente, medindo-se o momento de A, calcula-se o momento de B. Assim, seria possível obter valores reais para a posição ou para o momento de B realizando medições apenas na partícula A. Tal situação estabelece um desafio à teoria quântica, pois prevê que tanto a posição quanto o momento de uma partícula devem ter valores definidos, enquanto a mecânica quântica postula que ambos os valores não podem ser simultaneamente conhecidos.

Adicionalmente, os autores reiteram que em um experimento no qual o resultado de uma medição é conhecido antes que a medição ocorra, precisa existir algo como um “elemento de realidade”, uma variável definida, que determine o resultado da medição. Segundo eles, esses elementos de realidade são locais, ou seja, pertencem a um determinado ponto ou região do espaço-tempo, podendo ser influenciados apenas por eventos que aconteçam nas proximidades. Ou seja, informalmente, é como se houvesse uma “maquinaria” dependente apenas de eventos passados que manteria os estados permanentemente emaranhados, de modo que uma medição apenas revelaria um valor determinado por esse “mecanismo”. Conforme definido por Brunner *et.al* em [10], "a presunção de localidade implica que nós deveríamos ser capazes de identificar um conjunto de fatores passados, descritos por algumas variáveis λ , que tem uma influência causal conjunta em ambos os resultados e que contabiliza a dependência entre A e B", sendo que λ é muitas vezes denominada variável oculta local.

No entanto, a teoria quântica se configura como não-local, conforme será discorrido adiante, já que uma medição realizada em uma partícula de um par emaranhado causa um efeito imediato na outra, por maior que seja a distância entre as partículas no espaço-tempo, conflitando com a premissa de localidade estabelecida no paradoxo EPR. No exemplo tomado acima, ao se medir a posição da partícula A, a função de onda da posição da partícula B colapsa instantaneamente em um valor específico, de modo que o seu momento se torna incerto.

À primeira vista, tal constatação aparenta contradizer o limite de propagação de informação estabelecido pela teoria da relatividade. Na verdade, quando a função colapsa, na prática, nenhuma informação é transmitida. Tendo em vista as ideias desenvolvidas por David Bohm, o qual propôs uma versão mais prática do paradoxo EPR [15], imaginemos a seguinte situação. Enviam-se as partículas A e B aos observadores Alice e Bob. Quando Alice escolhe medir a posição, a medição que Bob faz da posição é exata, mas a medição do momento é incerta. Então, alguém poderia pensar que, se Bob repetir suas medições diversas vezes, ele veria que o valor da posição seria sempre o mesmo e o do momento variaria, devido à sua incerteza. Assim, ele conseguiria determinar qual medição Alice fez, isto é, obteria

uma informação mais rápido do que a velocidade da luz. Contudo, o Teorema da Não Clonagem [14] de estados quânticos evita que essa medição múltipla ocorra. O problema é que, com apenas uma medição disponível, não é possível determinar qual estado está incerto e qual está determinado. Portanto, o colapso instantâneo da função de onda não fornece nenhuma informação adicional ao outro observador, já que apenas as probabilidades são alteradas, as quais não são passíveis de medição.

3.2 Contextualidade

O jeito mais simples de se entender esse conceito pelo quadrado de Peres-Mermin [11], que está descrito abaixo

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \quad (32)$$

Cada uma das letras representa uma medição dicotômica, ou seja, só pode retornar +1 ou -1. E cada uma das linhas e colunas formam um contexto, isto é, um conjunto de variáveis que podem ser medidas concomitantemente.

Teorias de variáveis não-contextuais tentam atribuir valores determinados a todos os nove elementos. No entanto, verifica-se que a natureza quântica não admite tal atribuição. Então, ou não existem variáveis ocultas de qualquer forma, ou elas dependem do contexto da medição. Tal fenômeno é conhecido como contextualidade quântica.

4 Desigualdade CHSH

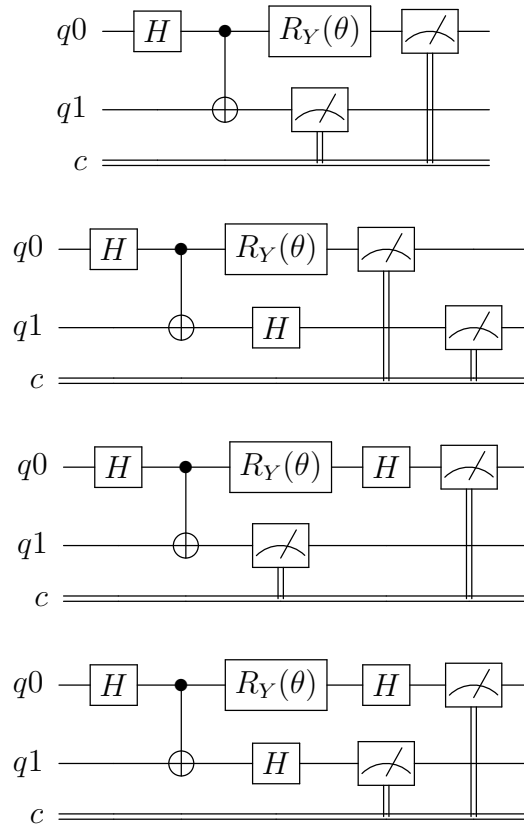
Agora que temos definidos esses conceitos, vamos tentar refutar as teorias de variáveis ocultas locais por meio de um experimento consagrado. Em 1964, John Bell publicou um artigo argumentando que qualquer teoria de variáveis definidas locais poderia ser descartada experimentalmente. Tal constatação pode ser provada pela chamada desigualdade CHSH, nomeada em referência ao seus criadores [8].

Inicialmente existem dois observadores, Alice e Bob, de modo que cada um possui uma parte de um sistema de dois níveis emaranhado. Em seguida, os indivíduos realizam medições em suas respectivas partes, em duas bases diferentes. Chamando as bases de Alice de A e a , e as bases de Bob de B e b , queremos saber o valor de $\langle CHSH \rangle = \langle AB \rangle - \langle Ab \rangle + \langle aB \rangle + \langle ab \rangle$. Alice e Bob podem medir apenas os valores +1 ou -1, de tal modo que o valor de $A(B - b) + a(B + b)$ pode ser apenas +2 e -2, ou seja, $|\langle CHSH \rangle| \leq 2$.

No nosso experimento, Bob realiza as medições B e b nas bases Z e X , respectivamente, enquanto Alice também usa bases ortogonais, porém variando o ângulo entre 0 e 2π em relação às bases de Bob.

Existem dois valores CHSH que podem ser estimados no experimento: $\langle CHSH1 \rangle = \langle AB \rangle - \langle Ab \rangle + \langle aB \rangle + \langle ab \rangle$ e $\langle CHSH2 \rangle = \langle AB \rangle + \langle Ab \rangle - \langle aB \rangle + \langle ab \rangle$. Uma vez escolhidos os eixos de medição correspondentes para ambas as partes, podemos estimar esses valores adicionando os resultados obtidos com sinal positivo para os termos pares (00 e 11) e com sinal negativo para os termos ímpares (01 e 10).

Por fim, construiremos 15 circuitos para estimar os valores desejados, variando o ângulo de medição no intervalo de 0 a 2π . Aqui estão representados alguns desses circuitos para um ângulo θ , apresentados na ordem $\langle AB \rangle$, $\langle Ab \rangle$, $\langle aB \rangle$, $\langle ab \rangle$



Esses circuitos estão simplesmente criando um par de Bell e medindo cada uma de suas partes em uma base diferente. Enquanto Bob ($q1$) sempre realiza sua medição na base computacional ou na base X , Alice ($q0$) realiza sua medição em uma base que difere da base de Bob pelo ângulo θ . Agora, vamos ver os resultados do nosso experimento.

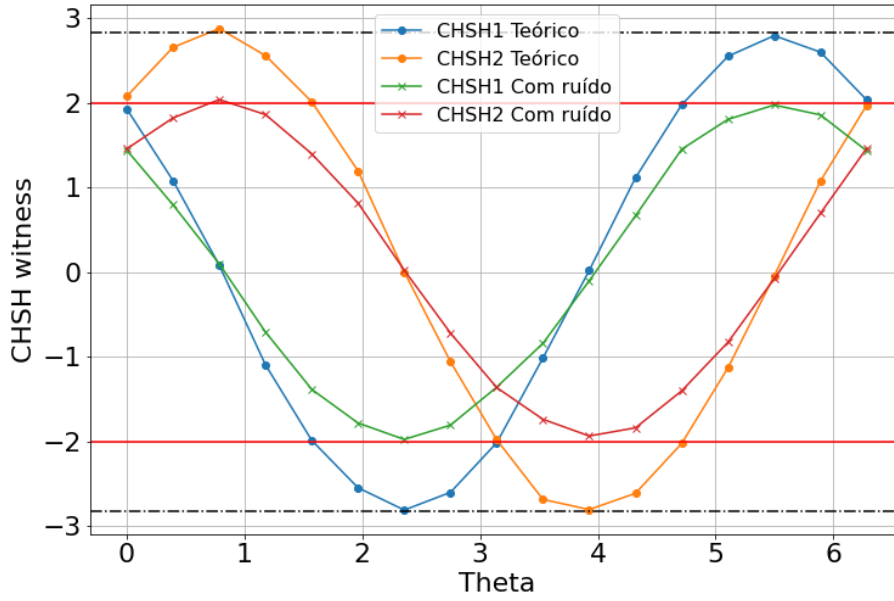


Figura 2: Experimento de CHSH.

Surpreendentemente, existe uma combinação de bases de medição para a qual $|CHSH| \geq 2$. Para entender porque isso aconteceu, devemos olhar de novo para o nosso sistema. Se $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, o valor esperado de $\langle AB \rangle$ é $\langle \psi | A \otimes B | \psi \rangle = -\cos \theta_{AB}$, onde θ_{AB} é o ângulo entre as bases de medição A e B . Dessa forma, para o caso em que $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x)$, e $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x)$, em que Bob mede com $B = \sigma_z$ e $b = \sigma_x$, observamos que $|\langle CHSH1 \rangle| = 2\sqrt{2} > 2$. Realizando o mesmo experimento em um intervalo menor e com mais medições, percebemos que $2\sqrt{2}$ é o máximo valor alcançável, mesmo para o caso quântico (representado pela linha pontilhada).

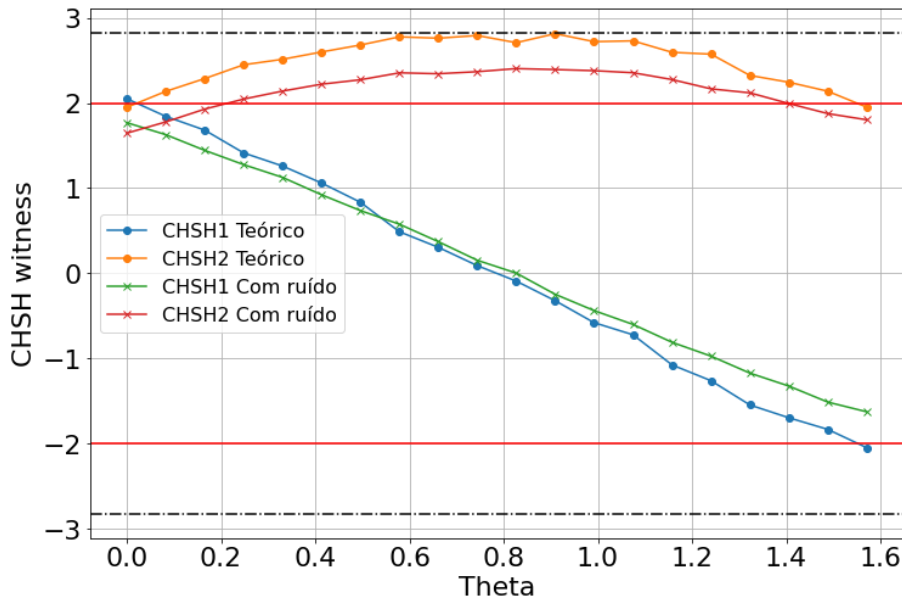


Figura 3: Pico de CHSH2 do caso quântico.

5 Negação simultânea de realismo local e não-contextualidade

5.1 Análise teórica

Tendo em vista as ideias apresentadas na seção 3, propõe-se uma refutação simultânea de localidade e de não-contextualidade por um único aparato, usando computação quântica. Para isso, nos baseamos na proposta de Min-Gang, Hua-Lei e Zeng-Bing [4], que detalha uma abordagem fundamentada na óptica quântica e a adaptamos para um conjunto de circuitos quânticos.

Partimos de uma situação hipotética em que temos quatro observadores, Alice, Bob, Charlie e Debbie. Inicialmente, Debbie possui três pares de qubits no estado de Bell $|\psi^-\rangle$, formando o estado $|\Psi\rangle_{123456} = |\psi^-\rangle_{12} \otimes |\psi^-\rangle_{34} \otimes |\psi^-\rangle_{56}$, em que

$$|\psi^-\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{ij} - |10\rangle_{ij}). \quad (33)$$

e $|01\rangle_{ij} = |0\rangle_i \otimes |1\rangle_j$.

Então, Debbie manda os qubits 1, 3 e 5 para Alice, Bob, e Charlie, respectivamente, mantendo os qubits 2, 4 e 6 para si. Em princípio, os quatro agentes se encontram em lugares diferentes, realizando medições locais em seus respectivos laboratórios. Partindo dessa ideia inicial, construiremos os experimentos para refutar as teorias de variáveis definidas.

5.1.1 Equações para a negação da localidade

Definiremos, primeiramente, a notação a ser utilizada $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{123456}$, $x_i = \sigma_{x_i}$, $y_i = \sigma_{y_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) e $x_2y_4y_6 = \sigma_{x_2}\sigma_{y_4}\sigma_{y_6}$. Aplicaremos \cdot para separar operadores locais. Com isso, é possível verificar as seguintes relações:

$$x_2y_4y_6 \cdot x_1 \cdot y_3 \cdot y_5 |\Psi\rangle = - |\Psi\rangle, \quad (34a)$$

$$y_2x_4y_6 \cdot y_1 \cdot x_3 \cdot y_5 |\Psi\rangle = - |\Psi\rangle, \quad (34b)$$

$$y_2y_4x_6 \cdot y_1 \cdot y_3 \cdot x_5 |\Psi\rangle = - |\Psi\rangle, \quad (34c)$$

$$x_2x_4x_6 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 |\Psi\rangle = - |\Psi\rangle, \quad (34d)$$

$$x_2x_4x_6 \cdot x_2y_4y_6 \cdot y_2x_4y_6 \cdot y_2y_4x_6 |\Psi\rangle = - |\Psi\rangle. \quad (34e)$$

A última equação deriva do operador identidade $x_2x_4x_6 \cdot x_2y_4y_6 \cdot y_2x_4y_6 \cdot y_2y_4x_6 = -I_{246}$, em que I_{246} é operador identidade para os qubits 2, 4 e 6.

É importante destacar que essas cinco equações incluem apenas operadores locais, o que significa que quaisquer três pessoas entre Alice, Bob, Charlie e Debbie podem atribuir valores para os operadores locais das outras pessoas realizando medições apenas em seus próprios qubits, sem afetar os demais sistemas. Assim, a partir da definição do artigo EPR de realismo local, cada operador separado por um \cdot pode ser entendido como um “elemento de realidade”. Por conseguinte, todos esses elementos de realidade possuem valores pré-definidos, que serão representados

pela notação $v(x_i)$, $v(y_i)$, $v(x_2y_4y_6)$, $v(y_2x_4y_6)$, $v(y_2y_4x_6)$ e $v(x_2x_4x_6)$, sendo $v = \pm 1$. Assim, para uma teoria como essa, podemos reescrever as equações (34) como

$$v(x_2y_4y_6)v(x_1)v(y_3)v(y_5) = -1, \quad (35a)$$

$$v(y_2x_4y_6)v(y_1)v(x_3)v(y_5) = -1, \quad (35b)$$

$$v(y_2y_4x_6)v(y_1)v(y_3)v(x_5) = -1, \quad (35c)$$

$$v(x_2x_4x_6)v(x_1)v(x_3)v(x_5) = -1, \quad (35d)$$

$$v(x_2x_4x_6)v(x_2y_4y_6)v(y_2x_4y_6)v(y_2y_4x_6) = -1. \quad (35e)$$

Entretanto, como cada valor v aparece duas vezes no lado esquerdo dessas equações, o produto dos valores no lado esquerdo deve ser igual a $+1$, o que diverge do resultado de -1 obtido multiplicando os valores do lado direito. Logo, provamos que as equações (35) são conjuntamente incompatíveis e que qualquer teoria baseada no realismo local não é capaz de reproduzir os resultados previstos pela mecânica quântica nas equações (34).

5.1.2 Equações para a negação da não-contextualidade

Já conseguimos desenvolver uma prova para refutar as teorias de variáveis definidas baseadas na noção de realismo local. Porém, para negar a não-contextualidade simultaneamente, precisaremos mudar alguns aspectos na nossa abordagem. Para isso, focaremos apenas nos qubits 2, 4 e 6, que ficam com Debbie. Tomando como base os operadores x_2 , y_2 , x_4 , y_4 , x_6 , y_6 , $x_2y_4y_6$, $y_2x_4y_6$, $y_2y_4x_6$ e $x_2x_4x_6$, obtemos cinco identidades:

$$x_2y_4y_6 \cdot x_2 \cdot y_4 \cdot y_6 = I_{246}, \quad (36a)$$

$$y_2x_4y_6 \cdot y_2 \cdot x_4 \cdot y_6 = I_{246}, \quad (36b)$$

$$y_2y_4x_6 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot x_6 = I_{246}, \quad (36c)$$

$$x_2x_4x_6 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 = I_{246}, \quad (36d)$$

$$x_2x_4x_6 \cdot x_2y_4y_6 \cdot y_2x_4y_6 \cdot y_2y_4x_6 = -I_{246}. \quad (36e)$$

Essas relações são sempre verdadeiras independente do sistema estudado. Analogamente ao caso da não-localidade atribuiremos valores predefinidos aos operadores, aos moldes dos elementos de realidade do paradoxo EPR.

$$v(x_2y_4y_6)v(x_2)v(y_4)v(y_6) = 1, \quad (37a)$$

$$v(y_2x_4y_6)v(y_2)v(x_4)v(y_6) = 1, \quad (37b)$$

$$v(y_2y_4x_6)v(y_2)v(y_4)v(x_6) = 1, \quad (37c)$$

$$v(x_2x_4x_6)v(x_2)v(x_4)v(x_6) = 1, \quad (37d)$$

$$v(x_2x_4x_6)v(x_2y_4y_6)v(y_2x_4y_6)v(y_2y_4x_6) = -1. \quad (37e)$$

As equações (37a)-(37d) são verdadeiras pois, do ponto de vista das teorias de variáveis ocultas não-contextuais, não importa qual é o conjunto de medições feitas, sendo sempre a revelação de valores definidos. Desse modo, $v(x_2y_4y_6) =$

$v(x_2)v(y_4)v(y_6)$, ou seja, é equivalente medir x_2 , y_4 e y_6 conjuntamente ou separadamente e depois multiplicar os resultados.

Analisando as equações (37), percebe-se que elas são incompatíveis, já que o resultado da multiplicação de todos os primeiros membros (no caso, igual a 1 pois todos os valores aparecem duas vezes) difere daquela dos segundos membros (-1). Portanto, há uma contradição entre as teorias NCHV e a teoria quântica.

5.2 Apresentação dos experimentos

5.2.1 Circuitos para a refutação da localidade

Para validar o resultado das equações (34) experimentalmente, devemos desenvolver um aparato de modo que os operadores $x_2x_4x_6$, $x_2y_4y_6$, $y_2x_4y_6$ e $y_2y_4x_6$ sejam medidos simultaneamente por um mesmo aparato. Isso é necessário pois as teorias de variáveis definidas locais não têm a presunção de não-contextualidade, ou seja, poderia se afirmar que a contradição das equações (35a)-(35e) advém de uma perturbação ao medir um operador, a qual afetaria os demais. Em outras palavras, o problema se originaria na contextualidade. Portanto, faz-se necessário medir os operadores $x_2x_4x_6$, $x_2y_4y_6$, $y_2x_4y_6$ e $y_2y_4x_6$ em um mesmo contexto a fim de se evitar a suposição de não-contextualidade. Para tal, faremos uma medição de estado GHZ dos qubits 2, 4 e 6 e correlacionaremos o estado obtido com o valor do operador.

Tal correlação é feita pela seguinte tabela:

	$x_2x_4x_6$	$x_2y_4y_6$	$y_2x_4y_6$	$y_2y_4x_6$
$ \Phi_0^+\rangle$	+1	-1	-1	-1
$ \Phi_0^-\rangle$	-1	+1	+1	+1
$ \Phi_1^+\rangle$	+1	+1	-1	+1
$ \Phi_1^-\rangle$	-1	-1	+1	-1
$ \Phi_2^+\rangle$	+1	+1	+1	-1
$ \Phi_2^-\rangle$	-1	-1	-1	+1
$ \Phi_3^+\rangle$	+1	-1	+1	+1
$ \Phi_3^-\rangle$	-1	+1	-1	-1

Tabela 4: valor dos operadores $x_2x_4x_6$, $x_2y_4y_6$, $y_2x_4y_6$ e $y_2y_4x_6$ para cada estado GHZ.

Dessa forma, poderemos medir o operador como um todo fazendo a substituição de seu estado GHZ pelo seu valor real. Além disso, vale notar que, em computação quântica, trabalha-se com 0 e 1, ao passo que os operadores valem ± 1 . Desse modo, eleva-se -1 ao valor do qubit para obter o valor do operador ($0 \rightarrow +1$; $1 \rightarrow -1$).

Levando isso em conta, desenvolvemos os seguintes circuitos para provar as equações (34a)-(34d).

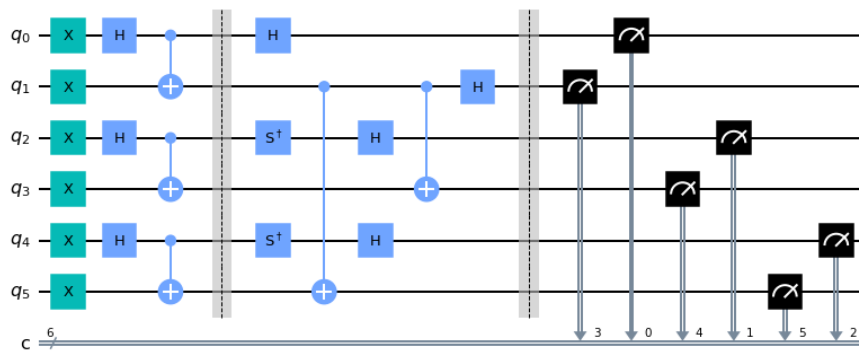


Figura 4: Circuito para a equação (34a).

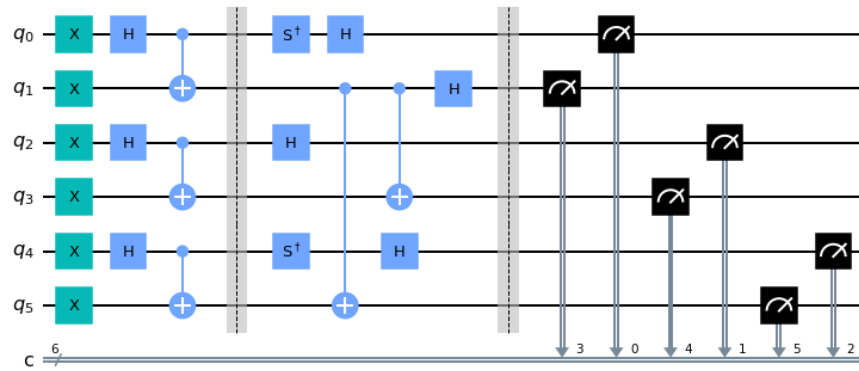


Figura 5: Circuito para a equação (34b).

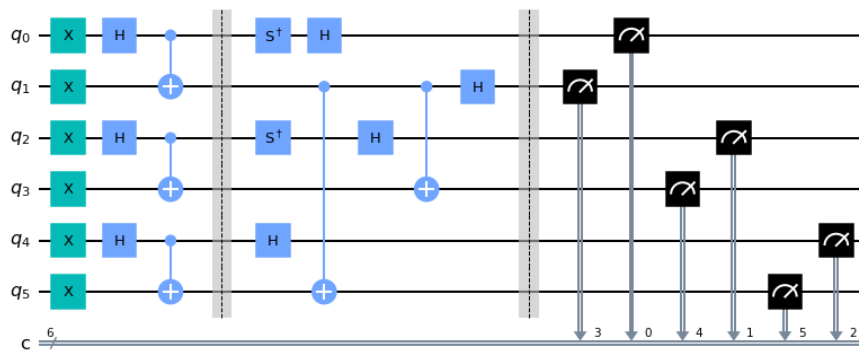


Figura 6: Circuito para a equação (34c).

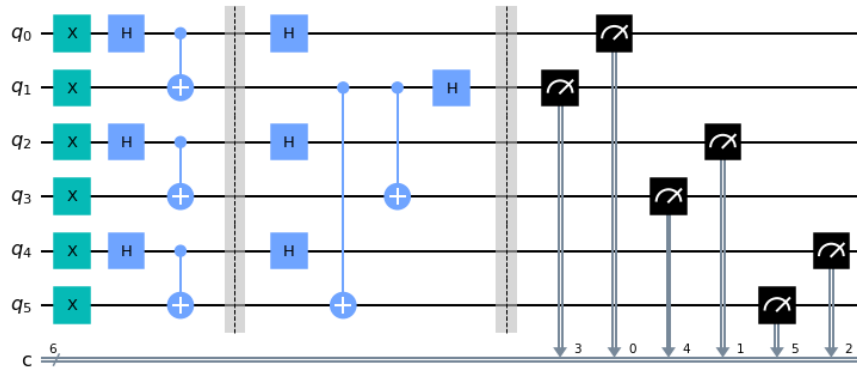


Figura 7: Circuito para a equação (34d).

Antes de tudo, é preciso observar que o Qiskit numera seus qubits a partir do 0. Então os qubits centrais são, na verdade, q_1 , q_3 e q_5 enquanto que os qubits que ficariam com os demais observadores são q_0 , q_2 e q_4 (*i.e.*, o número do qubit é o do operador subtraído de 1).

Tomemos o primeiro circuito para análise. Num primeiro momento, preparamos o estado de Bell $|\psi^-\rangle$, a fim de emaranhar os qubits. Em seguida aplicamos o medidor GHZ nos qubits centrais (1, 3 e 5) e fazemos a medição dos demais qubits na base adequada (no caso, os qubits 2 e 5 são medidos na base y e o 0 é medido na x).

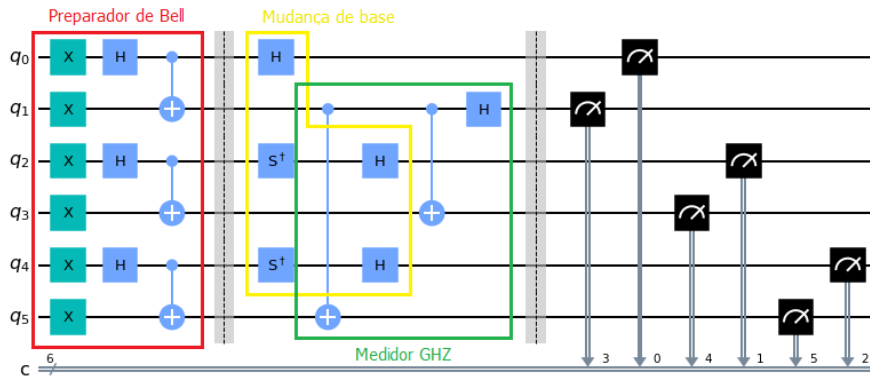
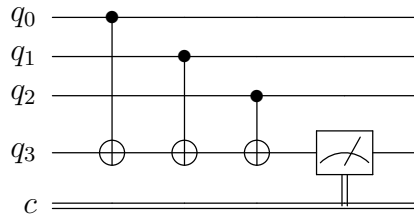


Figura 8: Análise do circuito da equação (34b).

Já para a equação (34e), foi necessária uma abordagem diferente. Levando em conta o funcionamento da porta CNOT, desenvolvemos um sistema que faz a multiplicação dos operadores *in loco*. Esse sistema faz uso de um qubit extra, ou seja, passa-se a utilizar 7 qubits para os circuitos seguintes.



Circuito que promove a multiplicação $q_0q_1q_2$ *in loco*.

Para cada valor de entrada ‘1’ nos qubits q_0, q_1 e q_2 , o valor de q_3 é alterado uma vez, ou seja, caso haja um número ímpar de entradas ‘1’, o resultado de q_3 é 1 e, caso haja um número par de entradas ‘1’, o resultado de q_3 é 0. Tal mecanismo é análogo a uma multiplicação em que 0 equivale a +1 e 1 equivale a -1 (a própria correlação que já estávamos utilizando!). Afinal, em uma multiplicação comum, caso haja um número ímpar de sinais negativos nos fatores, o produto é negativo e, se essa quantidade for par, o resultado será positivo. Com isso, elaboramos o seguinte circuito para a equação (34e):

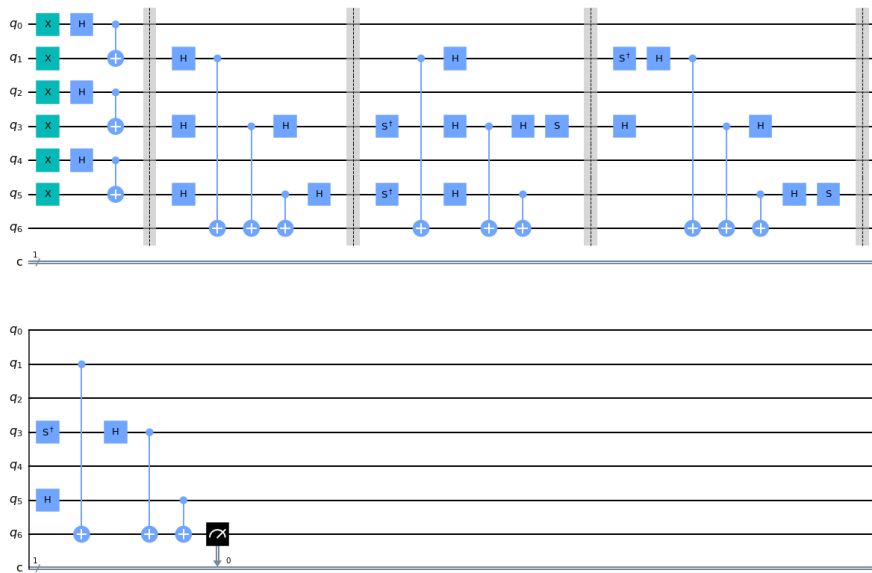


Figura 9: Circuito para a equação (34e).

Note que em cada divisória é medido cada um dos trios de operadores da equação.

5.2.2 Circuitos para a refutação da não-contextualidade

Já para a negação da não-contextualidade, utilizamos em todos os circuitos a segunda abordagem mencionada:

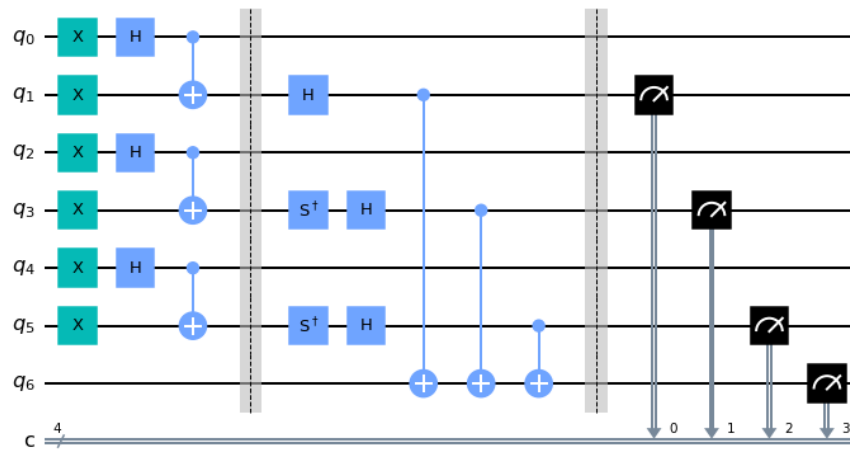


Figura 10: Circuito para a equação (36a).

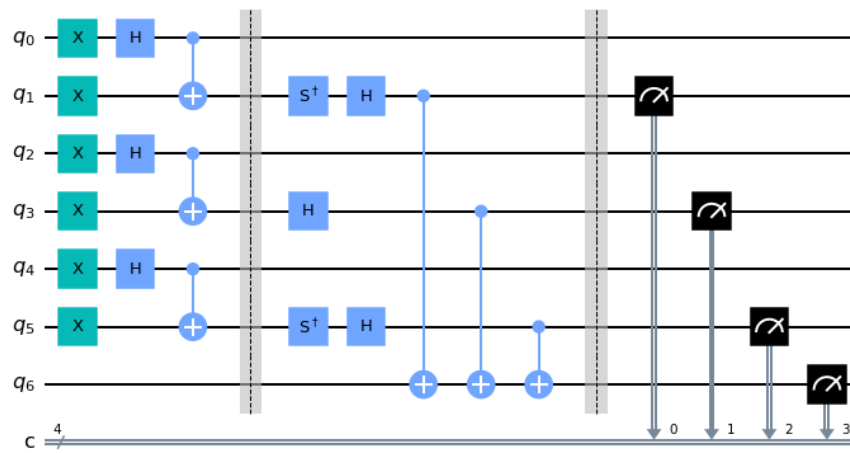


Figura 11: Circuito para a equação (36b).

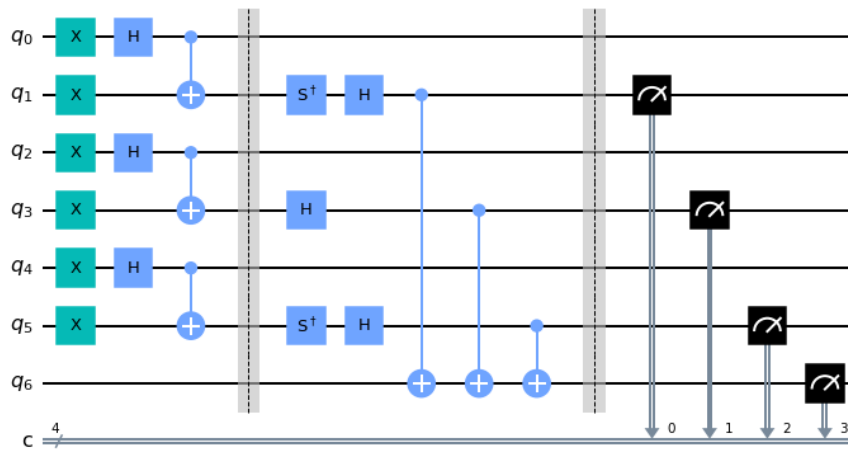


Figura 12: Circuito para a equação (36c).

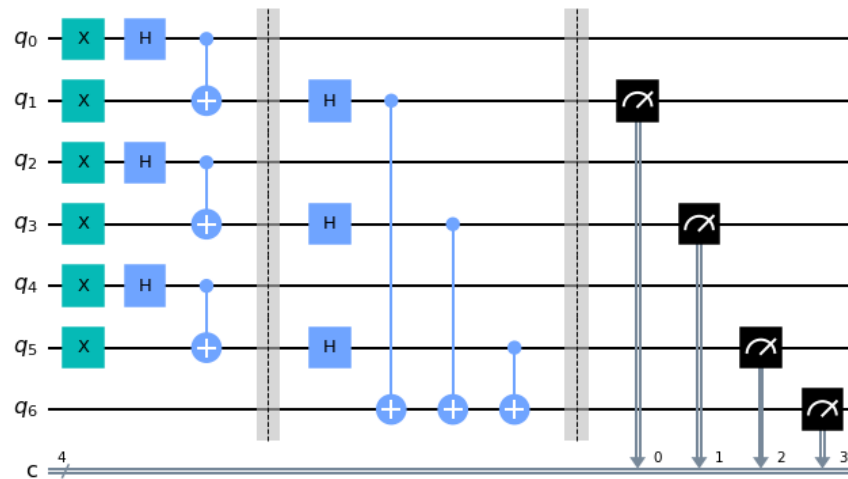


Figura 13: Circuito para a equação (36d).

Observe que o circuito para a equação (36e) é o mesmo da equação (34e), já apresentado.

Tomando o circuito da equação (36a) para análise, veja que os operadores x_2 , y_4 e y_6 são medidos diretamente nos qubits q_1 , q_3 , e q_5 ao passo que o operador $x_2y_4y_6$ é medido no qubit q_6 .

5.3 Resultados experimentais

Em vista disso, utilizamos o serviço IBM Quantum para rodar nosso projeto em computadores quânticos reais. Em todos os circuitos, fizemos 8×1000 rodadas.

5.3.1 Dados para refutar o realismo local

Antes é preciso fazer uma ressalva. Para que o realismo local seja devidamente refutado os observadores Alice, Bob, Charlie e Debbie precisam estar suficientemente separados para que não haja comunicação entre eles. Isto é, eles devem estar a uma distância na qual o lapso de tempo entre as medições seja menor do que o intervalo que a informação demoraria a chegar a um outro observador. Entretanto, os qubits em um computador quântico ficam separados a uma distância muito menor do que a necessária. Não obstante, tais experimentos ainda servem como uma prova de princípio. Assim, os dados obtidos com os circuitos das equações (34a)-(34d) são:

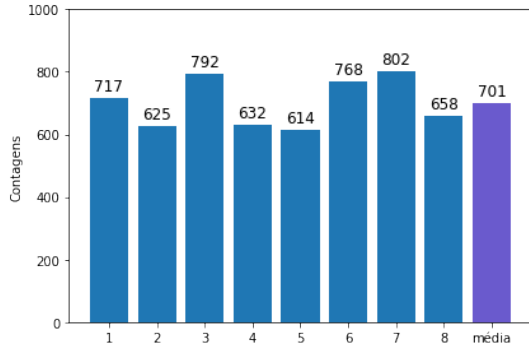


Figura 14: Dados da equação (34a)

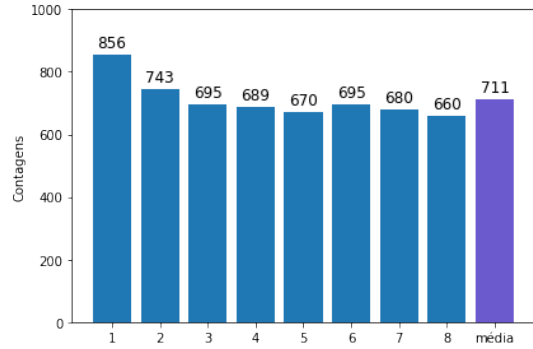


Figura 15: Dados da equação (34b)

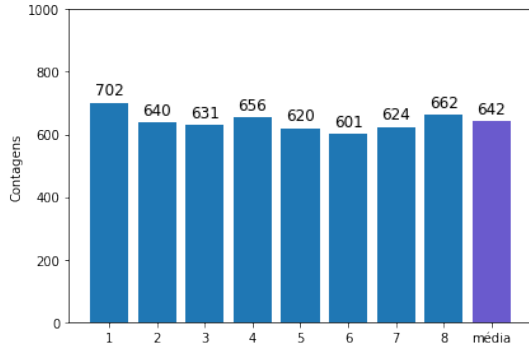


Figura 16: Dados da equação (34c)

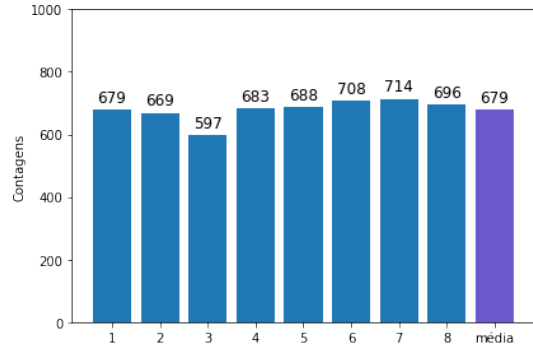


Figura 17: Dados da equação (34d)

Em que o número de contagens é o número de vezes que se obteve -1.

Note que resultado deveriam ser todos -1 (todas as contagens deveriam estar em 1000). No entanto, tal discrepância acontece pela alta taxa de erro que os computadores quânticos têm, devido a limitações tecnológicas.

Tal limitação se torna ainda mais relevante para o circuito da equação (34e), pelo fato de ser um circuito com muitas portas lógicas entre qubits. Então, utilizamos apenas os computadores `ibm_perth`, `ibm_nairobi` e `ibmq_jakarta`, os quais apresentaram menor taxa de erro quando comparados ao computadores `ibm_lagos` e `ibm_oslo`, cujos dados foram descartados. Assim, os resultados obtidos são:

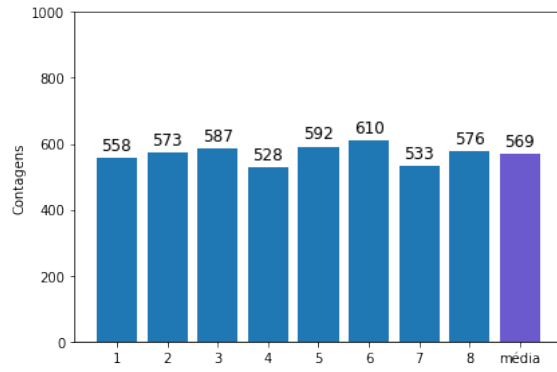


Figura 18: Dados da equação (34e).

O que nos faz crer que tal discrepância é causada por erros experimentais é o fato de que quando esses circuitos são rodados em simuladores quânticos, os resultados obtidos condizem com o esperado, isto é, todas as contagens valem 1000.

Unindo as médias dos experimentos com os respectivos desvios padrões, obtém-se:

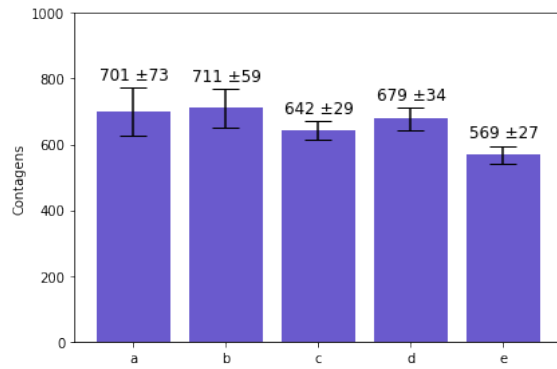


Figura 19: Médias dos 5 experimentos acompanhados dos respectivos desvios padrões

5.3.2 Dados para refutar a não-contextualidade

Já para as equações (36) obtivemos os seguintes resultados:

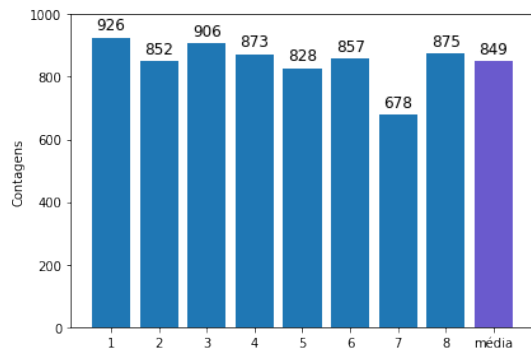


Figura 20: Dados da equação (36a)

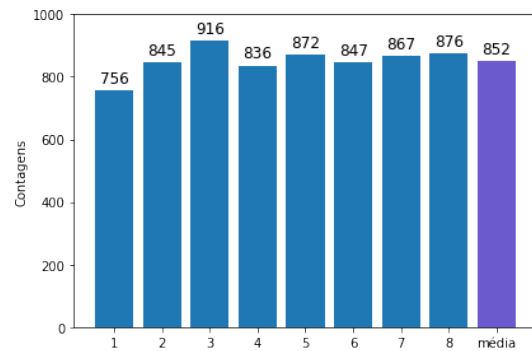


Figura 21: Dados da equação (36b)

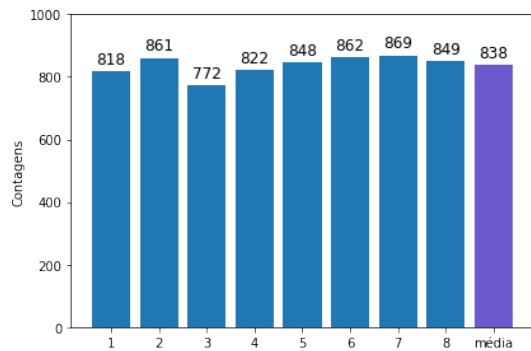


Figura 22: Dados da equação (36c)

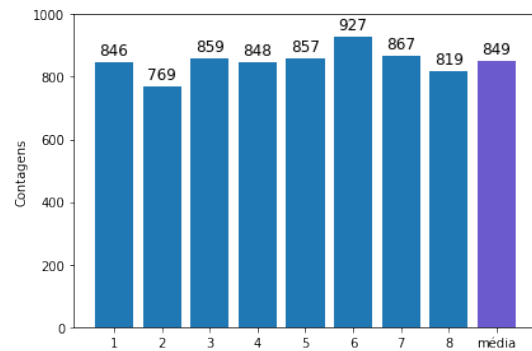


Figura 23: Dados da equação (36d)

Nesse caso, o número de contagens é a quantidade de vezes em que se obteve +1. Para a equação (36e) os resultados são os mesmos da figura 18

Apesar da grande taxa de erro, ainda se verifica uma tendência ao resultado esperado, o que serve como prova de princípio.

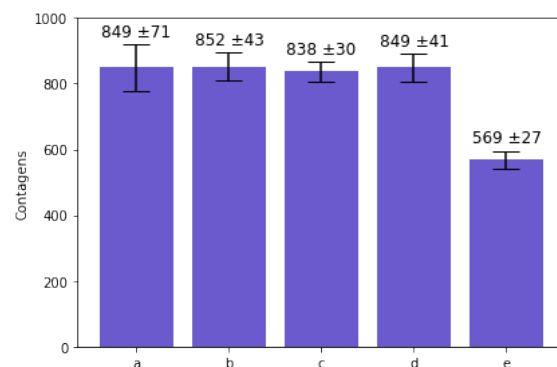


Figura 24: Médias dos 5 experimentos acompanhados dos respectivos desvios padrões

6 Conclusão

Em suma, este trabalho mostra que o realismo local e a não-contextualidade podem ser refutados simultaneamente pelo mesmo conjunto de circuitos quânticos. Ademais, deve-se ressaltar que a questão abordada representa o maior conflito entre a teoria quântica e as teorias de variáveis definidas, além de destacar a relação existente entre a não-localidade e a contextualidade, bem como a importância desses conceitos para a informação quântica.

Os códigos para a execução dos circuitos encontram-se em: https://1drv.ms/t/s!Agcd0YHEW8VRk11SB30TFIm_MIk0?e=ggdI6T

Referências

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [2] J. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics (Long Island City) **1**, 195 (1964)
- [3] S. Kochen and E. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, J. Math. Mech. **17**, 59 (1967).
- [4] Z. Min-Gang, Y. Hua-Lei and C. Zeng-Bing, *Simultaneous All-versus-Nothing Refutation of Local Realism and Noncontextuality by a Single System*, arXiv preprint arXiv:2208.11585 (2022).
- [5] M. Soeken, D. Miller, and R. Drechsler, *Quantum circuits employing roots of the Pauli matrices*, Phys. Rev. A **88.4**, 042322 (2013).
- [6] J. Garcia-Escartin and P. Chamorro-Posada, *Equivalent quantum circuits.*, arXiv preprint arXiv:1110.2998 (2011).
- [7] L. Hardy, *Spooky action at a distance in quantum mechanics.*, Contemporary physics, v. **39**, n. 6, p. 419-429 (1998).
- [8] J. Clauser, M. Horne, A. Shimony and R. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories.*, Physical review letters, v. **23**, n. 15, p. 880 (1969).
- [9] D. Greenberger, M. Horne and A. Zeilinger, *Going beyond Bell's theorem*, Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe, p. 69-72 (1989).
- [10] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani and S. Wehner, *Bell nonlocality*, Rev. Mod. Phys. **86**, 419 (2014).
- [11] C. Budroni, A. Cabello, O. Gühne, M. Kleinmann, and J. Larsson, *Kochen-Specker contextuality*, Reviews of Modern Physics, **94.4**, 045007 (2022).
- [12] IBM Quantum. <https://quantum-computing.ibm.com> (2023).

- [13] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Physical Review A, **62**, 062314 (2000).
- [14] W. Wootters, W. Zurek, *A single quantum cannot be cloned*, Nature, **299**, 802–803 (1982)
- [15] D. Bohm and Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957)